Jun.-Prof. Simon D. Lentner

Funktionentheorie
Sommersemester 2017

Universität Hamburg

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1.
Berechnen Sie mit Hilfe der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale. Hierbei meinen wir mit $|z-a|=r$ den geschlossenen Weg $\gamma(t) = a + r\exp(\mathrm{i}t)$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$.

1. $\int_{|z+1|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(z+1)(z-1)^3}$
2. $\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+\mathrm{i}} \mathrm{d}z$
3. $\int_{|z+2\mathrm{i}|=3} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+\pi^2}$

(1+1+1 Punkte)

Aufgabe 2.

1. Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion und $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$. Es gelte
$$f(z+w_1) = f(z+w_2) = f(z) \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}\ .$$
Zeigen Sie, dass f dann konstant ist. Es gibt also keine interessanten doppelt periodischen Funktionen auf $\mathbb{C}$.
2. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz und der Realteil von f sei nach oben beschränkt. Zeigen Sie, dass f dann konstant ist.
Hinweis:
Betrachten Sie die Verkettung $z \mapsto \exp(f(z))$.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 3.
Bestimmen Sie die Art der Singularität der Funktion f im angegebenen Punkt a.

1. $f(z) = \frac{z^3+3z-2\mathrm{i}}{z^2+1}$ an der Stelle $a = \mathrm{i}$.
2. $f(z) = \frac{z}{\mathrm{e}^z-1}$ an den Stellen $a = 2\pi\mathrm{i}k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
3. $f(z) = \exp\left(\exp(-\frac{1}{z})\right)$ an der Stelle $a = 0$.

(1+1+1 Punkte)

Aufgabe 4.
Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge mit $0 \in U$. Sei $f : U \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.
Zeigen Sie:
f hat in 0 genau dann eine hebbare Singularität / einen Pol / eine wesentliche Singularität, wenn f^2 in 0 eine hebbare Singularität / einen Pol / eine wesentliche Singularität hat.

(2 Punkte)

Aufgabe 5.

1. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in U$ und die holomorphen Funktionen $f, g, : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ sollen in a keine wesentliche Singularität haben.

   Zeigen Sie, dass dann auch die Funktionen $f + g, f \cdot g$ und, falls g in einer Umgebung von a keine Nullstelle hat, $\frac{f}{g}$ in a keine wesentliche Singularität haben und dass gilt

$$\begin{aligned} \omega(f+g;a) &\geq \min\left(\omega(f;a), \omega(g;a)\right) \\ \omega(f \cdot g;a) &= \omega(f;a) + \omega(g;a) \\ \omega(\tfrac{f}{g};a) &= \omega(f;a) - \omega(g;a) \end{aligned}$$

2. Es sei $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $f : D_r(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ sei holomorph mit Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \text{für} \quad z \in D_r(a) \setminus \{a\} .$$

   Beweisen Sie für f in a jeweils

   (a) $f(z)$ ist Einschränkung einer holomorphen Funktion auf $D_r(a)$ genau dann, wenn $a_n = 0$ für alle $n < 0$ gilt. Wir nennen dies eine hebbare Singularität.

   (b) $f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^k}$ mit einer holomorphen Funktion $h(z)$ auf $D_r(a)$ mit $h(a) \neq 0$ genau dann, wenn $a_{-k} \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < -k$. Wir nennen dies einen Pol der Ordnung k.

(c) Keine der beiden oberen genau dann, wenn $a_n \neq 0$ für unendlich viele negative Werte von n. Wir nennen dies eine wesentliche Singularität.

Zeigen Sie auch, dass im Falle eines Poles durch die Festsetzung $f(a) := \infty$ die Funktion zu einer stetigen Funktion $D_r(a) \to \mathbb{CP}^1$ auf die Riemannsche Zahlenkugel fortgesetzt wird, wie zu Beginn der Vorlesung.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 6. Berechnen Sie die Laurentreihenentwicklung der Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} \setminus \{1, -2\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{(z+2)(z-1)} \end{array}$$

für die folgenden Kreisringe um $a = 0$:

1. $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$
2. $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$
3. $\{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z|\}$

(1+1+1 Punkte)

Abgabe: 19.6.2017 in der Vorlesung.

Hinweis: Abgabe in Gruppen von maximal drei Studierenden pro Blatt. Jede/r muss in der Lage sein, alle abgegebenen Aufgaben vorzurechnen.