Jun.-Prof. Simon D. Lentner

Funktionentheorie
Sommersemester 2017

Universität Hamburg

Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1. Berechnen Sie für $a > 1$ mithilfe der Cauchy Integralformel

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{a + \cos t} \mathrm{d}t$$

(3 Punkte)

Aufgabe 2. Wir beweisen auf zwei verschiedene Arten die berühmte Formel

$$\zeta(2) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

a) Betrachten Sie ein Kontour-Integral der Funktion

$$f(z) := \frac{\cos(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)}$$

über den Rand der Rechtecke $[-N - 1/2, +N + 1/2] \times [-1/2, +1/2]$.
Benutzen Sie dabei die ersten Glieder einer Taylor-Reihe von $\frac{z}{\sin(\pi z)}$ um $z = 0$.

b) Verwenden Sie die Produktformel (aus der auch die Nullstellen ersichtlich sind)

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

und berechnen Sie auf zwei verschiedenen Arten $\lim_{z\to 0} \frac{\partial}{\partial z} \log(g(z))$ für die ganze Funktion

$$g(z) := \frac{\sin(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$$

Bemerkung: Ebenso können Sie jedes $\zeta(2k)$ berechnen. Viel schwieriger sind die $\zeta(2k+1)$, hierfür können Sie sich Ausdrücke mithilfe der Gamma-Funktion überlegen.

(4+3 Punkte)

Aufgabe 3. Ein alternativer Beweis für den Satz von Liouville: Sei $f(z)$ eine ganze beschränkte Funktion, dann zeigen Sie durch Kontour-Integration der Funktion

$$g(z) := \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}, \qquad a, b \in \mathbb{C}$$

dass $f(z)$ konstant ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 4. Finden Sie alle biholomorphen Abbildungen der Einheitskreisscheibe $D_1(0) \to D_1(0)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 5. In der Zahlentheorie extrem wichtige Ausdrücke sind die Gauß-Summen für p prim:

$$G(p) = \sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{p} k^2}$$

a) Berechnen Sie $G(2), G(3), G(5)$

b) Zeigen Sie für $p \neq 2$, dass $G(p) = \sum_{k=0}^{p-1} q_k e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{p} k}$ mit dem Legendre-Symbol

$$q_k := \begin{cases} 0, & 0 = k \\ +1, & 0 \neq k \text{ ein quadratischer Rest modulo } p \\ -1, & 0 \neq k \text{ kein quadratischer Rest modulo } p \end{cases}$$

wobei quadratischer Rest bedeuted, dass es ein $\pm l$ gibt mit $k = l^2$ modulo p.

c) Zeigen Sie damit für $p \neq 2$, dass

$$G(p)^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p = \begin{cases} p, & p = 1 \mod 4 \\ -p, & p = 3 \mod 4 \end{cases}$$

Hinweis: Diese Aufgabe erfordert nur Rechnen modulo p. Sie dürfen verwenden, dass $q_{-1} = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$.

d) Eine große Frage um 1805 war, welche der beiden Quadratwurzeln von $(-1)^{\frac{p-1}{2}} p$ die Gauß-Summe $G(p)$ ist. Zeigen Sie für $p \neq 2$, dass

$$G(p) = \begin{cases} \sqrt{p}, & p = 1 \mod 4 \\ i\sqrt{p}, & p = 3 \mod 4 \end{cases}$$

Integrieren Sie dafür die Funktion

$$f(z) = \frac{\exp(2\pi i z^2/p)}{\exp(2\pi i z) - 1}$$

über den Rand des Rechtecks $[0, p/2] \times [-R, R]$, dessen senkrechte Seiten leicht nach links ausgebeult sind, sodass die Differenz in x-Richtung immer noch $= p$ ist, aber der Punkt 0 umgangen wird. Sie sollten dann diese beiden Seiten gemeinsam integrieren.

(1+2+*+* Punkte)

Abgabe: 12.6.2017 in der Vorlesung.

Hinweis: Abgabe in Gruppen von maximal drei Studierenden pro Blatt. Jede/r muss in der Lage sein, alle abgegebenen Aufgaben vorzurechnen.