Jun.-Prof. Simon D. Lentner

Funktionentheorie
Sommersemester 2017

Universität Hamburg

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Stammfunktion $F(z)$ mit $F(0) = 0$ von $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}_0$ explizit über Theorem 3.2.4 mit $a = 0$

a) in Polarkoordinaten, wobei Sie für jedes (r, ϕ) den radialen Weg wählen und das komplexe Integral auswerten.

b) in kartesischen Koordinaten, wobei Sie für jedes (x, y) die Summe von zwei Strecken parallel zu den Koordinatenachsen wählen und das komplexe Integral auswerten.

Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der offensichtlichen Lösung, die eine analytische Fortsetzung der Stammfunktion von z^n auf $\mathbb{R}$ ist.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 2. Berechnen Sie direkt das Integral $\int_\gamma \frac{1}{z}\mathrm{d}z$ für den kreisförmigen geschlossenen Weg, der 0 einmal gegen den Uhrzeigersinn im Radius $r \in \mathbb{R}^+$ umrundet.

a) durch direkte Berechnung des komplexen Kurvenintegrals.

b) unter Verwendung einer komplexen Stammfunktion auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0}$ und Limesbildung bei $z = -r + \mathrm{i}0$

(2+2 Punkte)

Aufgabe 3. Wir betrachten die Beta- und Gamma-Funktion, die im Bereich $\mathrm{Re}\,(z), \mathrm{Re}\,(a), \mathrm{Re}\,(b) > 0$ gegeben sind durch

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$$
$$\mathrm{B}(a,b) := \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathrm{d}t$$

a) Zeigen Sie durch geschickte Substitution

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)\mathrm{B}(a,b)$$

b) Unter Verwendung des letzten Übungsblattes, berechnen Sie damit $\mathrm{B}(a,b)$ für $n, m \in \mathbb{N}$ und geben Sie Definitionslücken in einer maximalen analytischen Fortsetzung an.

c) Zeigen Sie durch trigonometrische Substitution $t = \cos^2(\phi)$

$$B(1/2, 1/2) = \pi$$

d) Berechnen Sie durch Kombination der ersten zwei Teilaufgabe $\Gamma(1/2)$. Führen sie dieses Integral andererseits durch Substitution $x^2 = t$ auf das Eulersche Fehlerintegral zurück und zeigen Sie damit:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

e) Zeigen Sie das letzte Resultat andererseits durch Quadrieren des Integrals und Wechsel in Polarkoordinaten.

f) Benutzen Sie ein weiteres Mal die trigonometrische Form für $\mathrm{B}(a, b)$ und die Substitution $2\phi = \tau$ um zu zeigen

$$\mathrm{B}(z, z) = 2^{1-2z} B(z, 1/2)$$

und folgern Sie daraus die Legendresche Verdoppelungsformel

$$\Gamma(z)\Gamma(z + 1/2) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z)$$

Finden Sie diese Formel aufgrund der Lage der Pole einsichtig?

(2+2+2+1+2+3 Punkte)

Abgabe: 29.5.2017 in der Vorlesung.

Hinweis: Abgabe in Gruppen von maximal drei Studierenden pro Blatt. Jede/r muss in der Lage sein, alle abgegebenen Aufgaben vorzurechnen.