Jun.-Prof. Simon D. Lentner

Funktionentheorie
Sommersemester 2017

Universität Hamburg

Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1. Betrachten Sie die geometrische Reihe $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$ um $z_0 = 1$ mit Konvergenzradius 1. Sei z_0 im Konvergenzbereich, dann berechnen Sie durch explizite Substitution und Binomischen Lehrsatz die Reihe für $f(z)$ um z_0 (beginnen Sie mit dem konstanten Koeffizienten). Was ist der Konvergenzradius der neuen Reihe?

Dann drücken Sie $f(z)$ als elementare Funktion aus, entwickeln Sie diese direkt um z_0 und vergleichen Sie.

(3 Punkte)

Aufgabe 2.

a) Lösen Sie die Differentialgleichung $z\frac{\partial}{\partial z}f(z) = \lambda\, f(z)$ für Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$.

b) Zeigen Sie, dass für gegebenes $z_0 \neq 0$ der Raum V_{z_0} der Lösungen, welche um z_0 in eine absolut konvergente Potenzreihe entwickelt werden können, 1-dimensional ist und bestimmen Sie explizit alle Koeffizienten c_n der Potenzreihe und den Potenzreihenradius.

c) Bestimmen Sie explizit die analytische Fortsetzung $V_{z_0} \to V_{z_1}$ zu einem Punkt im Definitionsbereich. Für welche Werte λ ergibt dies eine eindeutige Funktion auf ganz $\mathbb{C}\backslash\{0\}$?

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 3.

a) Zeigen Sie dass das folgende Integral für $\mathrm{Re}\,(z) > 0$ konvergiert

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

und berechnen Sie aus der Definition $\Gamma(1), \Gamma(2)$.

b) Zeigen Sie dass die Funktion

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\int_0^\infty t^{z}e^{-t}\mathrm{d}t$$

eine analytische Fortsetzung für $\mathrm{Re}\,(z) > -1,\ z \neq 0$ ist.
Berechnen Sie damit auch $\Gamma(3)$.

c) Finden Sie induktiv weitere analytische Fortsetzungen.
Berechnen Sie damit auch $\Gamma(n), n \in \mathbb{N}$.

d) Können Sie andererseits sogar die folgende maximale analytische Fortsetzung beweisen?

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t, \qquad z \notin -\mathbb{N}_0$$

(2+3+2+$*$ Punkte)

Aufgabe 4. Wir verwenden die folgende Strategie um viele harmonische Funktionen auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ zu konstruieren:

$$\Delta f(x,y) := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x,y) = 0$$

Verwenden Sie den Laplace Operator in Polarkoordinaten (r,ϕ):

$$r^2 \Delta f(x,y) = \left[\left(r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right] f(r,\phi) = 0$$

Lösen Sie zunächst eine Eigenwert-Gleichung für die beiden Summanden, die nur von r bzw. ϕ abhängen, dh. finden Sie für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ je eine Basis des (2-dimensionalen) Raums aller Lösungen für $R_\lambda(r)$ bzw. $Y_\lambda(\phi)$ der folgenden Differentialgleichungen in je einer Variable:

$$\left(r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r\frac{\partial}{\partial r}\right) R_\lambda(r) = \lambda\, R_\lambda(r)$$
$$\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\, Y_\lambda(\phi) = \lambda\, Y_\lambda(\phi)$$

wobei wir dann natürlich verlagen, dass $Y_\lambda(\phi)$ periodisch sein muss.
Hinweis: Es ist keine besondere Technik vonnöten, Sie könnten die Lösungen erraten.

Bestimmen Sie allgemein, welche Produkte $R_\lambda(r)Y_\mu(\phi)$ die die ursprüngliche Differentialgleichung lösen und geben Sie die Lösungen explizit an.

Kommentar: Natürlich sind alle Linearkombinationen (oder entsprechend konvergenten Reihen) in diesen Lösungen wieder Lösungen der Differentialgleichung. Man weiß, dass dies dann alle Lösungen sind.

Sehen Sie den Zusammenhang ihrer Lösungen zur Funktionentheorie?
Sehen Sie den Zusammenhang ihrer Lösungen zu Atom-Orbitalen?

(4 Punkte)

Abgabe: 15.5.2017 in der Vorlesung.

Hinweis: Abgabe in Gruppen von maximal drei Studierenden pro Blatt. Jede/r muss in der Lage sein, alle abgegebenen Aufgaben vorzurechnen.