Jun.-Prof. Simon D. Lentner

Funktionentheorie
Sommersemester 2017

Universität Hamburg

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1. Es seien r_1 bzw. r_2 die Konvergenzradien der Potenzreihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ bzw. $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu$ mit Werten in einem Banachraum E.

1. Zeigen Sie, dass aus $|a_\nu| \leq |b_\nu|$ für fast alle ν folgt $r_1 \geq r_2$.
2. Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu + b_\nu)z^\nu$ größer gleich dem Minimum von r_1 und r_2 ist. Überlegen Sie sich auch ein Beispiel, wo der Konvergenzradius strikt größer als das Minimum ist.

(1+1 Punkte)

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \sin(z)$ nicht gleich einer polynomialen Funktion sein kann. (Sie ist somit ein Beispiel für eine ganze Funktion, die nicht polynomial ist.)

(1 Punkte)

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n}(z-1)^n$ abhängig von einer Wahl $a \in \mathbb{C}$, wobei $\binom{a}{n} := \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} kn \\ n \end{pmatrix} z^n$ mit $k \in \mathbb{N}$.
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt[n]{n!}}$
   Hinweis: Betrachten Sie den Limes des Logarithmus der Koeffizienten.
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n) z^n$
6. Für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ in Teilaufgabe 2), zeigen Sie:
   Die Reihe divergiert für eine dichte Teilmenge des Rands des Konvergenzbereichs. Bestimmen Sie damit den Konvergenzradius einer jeden Entwicklung der Funktion um einen anderen Punkt z_0 des Konvergenzbereichs und folgern Sie, dass sich diese Potenzreihe nicht analytisch fortsetzen lässt.

(1+1+1+1+1+2 Punkte)

Aufgabe 4. Wir betrachten die folgende lineare Differentialgleichung 2. Ordnung für eine feste Zahl $a \in \mathbb{C}$ (mit $a \neq 0, -1, -2, \ldots$):

$$f(z) = \left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + a\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f(z)$$

a) Zeigen Sie: Wenn eine Lösungsfunktion $f(z)$ um einen Punkt z_0 in eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ entwickelt werden kann (insb. bei z_0 definiert ist), so erfüllen die Koeffizienten

$$c_n = c_{n+1}(n+1)(n+a) + c_{n+2}(n+2)(n+1)z_0$$

b) Zeigen Sie damit: Der Vektorraum V_0 der um $z_0 = 0$ entwickelbare Lösungsfunktion ist eindimensional und wird aufgespannt von einer Potenzreihe mit Koeffizienten $c_n = \frac{1}{(n!)^2}\binom{a+n-1}{n}^{-1}$, die eine ganze Funktion auf $\mathbb{C}$ definiert. Wir nennen sie (verallgemeinerte) *hypergeometrische Funktion* ${}_0F_1(a;z)$.

c) Zeigen Sie damit auch: Der Vektorraum V_{z_0} der um $z_0 \neq 0$ entwickelbaren Lösungsfunktionen ist zweidimensional, und die entsprechenden Reihen konvergieren absolut auf jeder Kreisscheibe um z_0 vom Radius $\rho < |z_0|$ (dh.der Konvergenzradius ist mindestens $|z_0|$).

d) Zeigen Sie, dass analytisches Fortsetzen für je zwei Punkte $z_0, z_1 \neq 0$ mit $|z_0 - z_1| < |z_0|$ einen linearen Isomorphismus $V_{z_0} \to V_{z_1}$ ergibt (wir rechnen ihn hier nicht explizit aus). Geben Sie explizit den linearen Monomorphismus $V_0 \to V_{z_1}$ an, unter Verwendung der Werte ${}_0F_1(a;z_0), {}_0F_1'(a;z_0)$.

e) Zeigen Sie dass $f(z) := z^{1-a}{}_0F_1(2-a;z)$ ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung ist, definiert z.B. auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0}$. Folgern Sie dann, dass der lineare Isomorphismus $V_{z_0} \to V_{z_1} \cdots \to V_{z_n}$ entlang einer geschlossenen Kette $z_0, z_1, \ldots, z_n = z_0$, die sich einmal um den Punkt $z = 0$ windet, in einer geeigneten Basis von V_{z_0} gleich der folgenden diagonalen Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\pi \imath a} \end{pmatrix}$$

Zusätzlich können Sie auch den ausgeschlossenen Fall $a = 0$ untersuchen!

(1+2+3+2+2 Punkte)

Abgabe: 8.5.2017 in der Vorlesung.

Hinweis: Abgabe in Gruppen von maximal drei Studierenden pro Blatt. Jede/r muss in der Lage sein, alle abgegebenen Aufgaben vorzurechnen.