Jun.-Prof. Simon D. Lentner

Funktionentheorie
Sommersemester 2017

Universität Hamburg

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1.

a) Zeigen Sie, dass eine Möbiustransformation Geraden und Kreise in Geraden und Kreise überführt.

b) Finde die Untergruppe der Möbiustranformationen, die $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ in sich überführt.

c) Erinnern Sie sich, dass Möbiustranformationen auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mindestens einen Fixpunkt haben. Finden Sie eine Möbiustranformationen aus Teilaufgabe b), die auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ keinen Fixpunkt hat.

(2+2+1 Punkte)

Aufgabe 2. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt harmonisch, falls sie die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ erfüllt.

Überzeugen Sie sich zunächst nocheinmal: Realteil (und auch Imaginärteil) einer zweimal stetig komplex differenzierbaren Funktion sind harmonisch. Man kann sogar zeigen, dass umgekehrt jede harmonische Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ Realteil (und auch Imaginärteil) einer komplex differenzierbaren Funktion ist.

a) Diese Umkehrung gilt allerdings nicht, falls man $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ersetzt: Zeigen Sie, dass die Funktion $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \log |z|$ zwar harmonisch, aber nicht der Realteil einer komplex differenzierbaren Funktion ist.

b) Finden Sie alle harmonischen Funktionen auf $\mathbb{C}$ die in x-Richtung konstant sind. Geben Sie dann alle zweimal stetig komplex differenzierbaren Funktionen an, deren Realteil in x-Richtung konstant ist.

c) Finden Sie alle radialsymmetrischen harmonischen Funktionen auf $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Gibt es zweimal stetig komplex differenzierbare Funktionen auf $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, deren Realteil radialsymmetrisch ist?

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 3. Betrachten Sie die Reihe von Funktionen $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ mit Gliedern $f_n(z) = z^n/n$ für das offene Intervall $z \in (-1, 0)$. Konvergiert diese Folge

a) punktweise?
b) punktweise absolut?
c) gleichmäßig?
d) gleichmäßig absolut?
e) lokal gleichmäßig?
f) lokal gleichmäßig absolut?
g) bezüglich der L_1-Norm? (also "im Mittel")

(5 Punkte)

Aufgabe 4. Betrachten Sie für $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\nu = 1, 2, \ldots$ die Folge von Funktionen

$$f_\nu(z) = \frac{1}{1 + az^\nu} .$$

a) Man zeige, dass für $\nu \to \infty$ die Folge auf der offenen Kreisscheibe $D_1(0)$ lokal gleichmäßig gegen die konstante Funktion 1 konvergiert.
b) Zeigen Sie, dass für jedes $r > 1$ die Folge auf $\mathbb{C} \setminus D_r(0)$ gleichmäßig gegen die konstante Funktion 0 konvergiert.

(2+2 Punkte)

Abgabe: Wegen 1. Mai ausnahmsweise Mittwoch 3.5.2017 in der Vorlesung.

Hinweis: Abgabe in Gruppen von maximal drei Studierenden pro Blatt. Jede/r muss in der Lage sein, alle abgegebenen Aufgaben vorzurechnen.