Jun.-Prof. Simon D. Lentner

Funktionentheorie
Sommersemester 2017

Universität Hamburg

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1.

a) Man betrachte auf $\mathbb{R}^2$ die folgenden Normen

$$\begin{aligned}\nu_1(x,y) &= |x|+|y|\\ \nu_2(x,y) &= \max(|x|,|y|)\\ \nu_3(x,y) &= \sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}$$

skizziere die entsprechenden Einheitskreisscheiben um den Punkt 0:

$$D_1(0)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\nu_i(x,y)<1\}$$

und zeige durch Angabe expliziter positiver Konstanten, dass diese Normen äquivalent sind.

b) Zeigen Sie unter Ausnützung der Kompaktheit der Einheitssphäre $S^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$, dass alle Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.

c) Geben Sie auf dem Vektorraum

$$l^1(\mathbb{R}):=\{(a_n)\mid a_n\in\mathbb{R}:\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|<\infty\}$$

der absolut summierbaren reellwertigen Folgen zwei *inäquivalente* Normen an und begründen Sie, warum die Normen inäquivalent sind.

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Es gibt keine stetige Bijektion $f:S^1\to\mathbb{R}$. (Hinweis: Betrachten Sie die Einschränkung von f auf $S^1\setminus\{p\}$.)

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Betrachten Sie die Argumentsfunktion $\arg:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to(-\pi,\pi]$.

a) Beschreiben Sie Beziehungen zwischen arg und den Funktionen arccos bzw. arctan.

b) Bestimmen Sie die Teilmenge $S\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$, auf der arg stetig ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(1+1 Punkte)

Aufgabe 4. Überprüfen Sie die folgenden Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf komplexe Differenzierbarkeit:

a) $\frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \operatorname{Re}(z) - \frac{2t}{1+t^2} \cdot \operatorname{Im}(z) + \mathrm{i} \cdot \left(\frac{2t}{1+t^2} \cdot \operatorname{Re}(z) + \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \operatorname{Im}(z)\right)$, $\forall t \in \mathbb{R}$

b) $f(z) = z^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

c) $f(z) = \overline{z}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

d) $f(z) = e^{t \operatorname{Re} z}(\cos(t \operatorname{Im} z) + \mathrm{i} \sin(t \operatorname{Im} z))$, $\forall t \in \mathbb{R}$

(4 Punkte)

Aufgabe 5. Sei $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ die komplexe obere Halbebene. Betrachten Sie die Cayley-Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{H} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie: f ist injektiv.

b) Bestimmen Sie das Bild von f.

(2+2 Punkte)

Abgabe: Montag 24.4.2017 in der Vorlesung.

Hinweis: Abgabe in Gruppen von maximal drei Studierenden pro Blatt. Jede/r muss in der Lage sein, alle abgegebenen Aufgaben vorzurechnen.