

Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1.

- a) Ist die Teilmenge $\{z \in \mathbb{C} : |z^2 + 2| \leq 1\}$ von \mathbb{C} abgeschlossen? Ist sie zusammenhängend?
- b) Ist die Teilmenge $\{z \in \mathbb{C} : |z^2 - 2| \leq 1\}$ von \mathbb{C} abgeschlossen? Ist sie zusammenhängend?

Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort!

(2+2 Punkte)

Aufgabe 2. Bestimmen Sie eine Stammfunktion $F(z)$ von $f(z) = 2/z$ auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ mit $F(-1) = 0 + 4\pi i$. Was ist $F(i)$? In welchem Intervall liegt $\text{Im}(F(z))$? Berechnen Sie damit das Integral der Funktion $f(z)$ über den Weg e^{it} , $t \in (0, 2\pi)$.

(2 Punkte Punkte)

Aufgabe 3. Betrachten Sie die Möbiustransformation

$$\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} : z \mapsto i \frac{z - i}{z + i}$$

Was ist das Bild des Einheitskreises und der beiden Koordinatenachsen? Was ist Bild und Urbild von ∞ ?

(2 Punkte Punkte)

Aufgabe 4. Berechnen Sie die folgenden Integrale

a)

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx$$

b)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{(x^2 + m^2)^2} dx$$

wobei $k, m \in \mathbb{R}$ und Sie dürfen annehmen $m \neq 0$.

(3+3 Punkte)

Aufgabe 5. Berechnen Sie die folgenden Laurent-Reihen:

- a) $f(z) = \frac{z^3 - z^2 + 6z}{(z+2)(z-3)}$ in den Bereichen $|z| < 2$ und $2 < |z| < 3$ und $3 < |z|$.

b) $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ um $z = 1$.

c) $f(z) = (\sin(z))^{-2}$ um $z = 0$ die ersten beiden Glieder.

(2+2+2 Punkte)

Abgabe: 3.7.2017 in der Vorlesung.

Hinweis: Abgabe in Gruppen von maximal drei Studierenden pro Blatt. Jede/r muss in der Lage sein, alle abgegebenen Aufgaben vorzurechnen.