Jun.-Prof. Simon D. Lentner

Funktionentheorie
Sommersemester 2017

Universität Hamburg

Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1. Berechnen Sie die folgenden reellen trigonometrischen Integrale

a)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3t)}{5 - 4\cos(4t)} \mathrm{d}t$$

b)

$$\int_0^{2\pi} e^{-\cos(t)} \sin(t + \sin(t)) \mathrm{d}t \qquad \int_0^{2\pi} e^{-\cos(t)} \cos(t + \sin(t)) \mathrm{d}t$$

(2+2 Punkte)

Aufgabe 2. Berechnen Sie die folgenden reellen Integral:

a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 5x^2 + 4} \mathrm{d}z$$

b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} \mathrm{d}z$$

c) Zeigen Sie die folgende Fourier-Transformation

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{x^2 + a^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{|a|} e^{-k|a|}$$

(1+2+2 Punkte)

Hinweis: Benutzen Sie dafür entweder Satz 4.5.4 oder integrieren Sie direkt über den Rand eines Halbkreises mit Radius $R \to \infty$.

Aufgabe 3. Wir möchten die berühmte Euler-Spiegelungs-Formel zeigen:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \qquad z \notin \mathbb{Z}$$

wobei wir für den Beweis annehmen $z \in (0,1)$. Finden Sie diese Formel aufgrund der Lage der Nullstellen und Pole einsichtig?

a) Zeigen Sie über die Beta-Funktion

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{1+t}\mathrm{d}t$$

wobei der Integrand auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0}$ durch den Hauptzweig des Logarithmus wohldefiniert ist.

b) Berechnen Sie dann dieses Integral durch Contour-Integration der ähnlichen Funktion $\frac{t^{z-1}}{1-t}$ über folgenden Weg in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0}$:
Erst in großem Radius R eine Kreisbahn von $-R-i\epsilon$ nach $-R+i\epsilon$, dann gerade bis zu einem kleinen Radius $-r+i\epsilon$, dann eine Kreisbahn von $-r+i\epsilon$ nach $-r-i\epsilon$, und dann wieder gerade nach $-R-i\epsilon$.

(2+3 Punkte)

Aufgabe 4. Wir studieren Konsequenzen aus dem Satz von Picard:

a) Folgern Sie den "'kleinen Satz von Picard": Eine ganze Funktion $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ nimmt alle Werte bis auf maximal einen an, oder sie ist konstant.
Hinweis: Studieren Sie die Laurent-Entwicklung um $z=\infty$ vermöge $z=1/t$.

b) Zeigen Sie diesen Satz alternativ direkt, wobei Sie verwenden dürfen, dass es eine holomorphe Funktion $\phi : \mathbb{C}\backslash\{0,1\} \to D_1(0)$ gibt (z.B. eine bestimmte sogenannte Modul-Funktion).

c) Zeigen Sie damit: Jede ganze bijektive Funktion $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ is linear.

(3+1+2 Punkte)

Abgabe: 26.6.2017 in der Vorlesung.

Hinweis: Abgabe in Gruppen von maximal drei Studierenden pro Blatt. Jede/r muss in der Lage sein, alle abgegebenen Aufgaben vorzurechnen.

Hinweis: Nach übereinstimmendem Wunsch findet am Mittwoch 21.6. die Vorlesung normal statt, je nach Zeit schließen wir Kapitel 4.4 und 4.5 im Skript ab und damit den regulären Stoff. Das letzte Blatt 11 ist dann lediglich ein Wiederholungsblatt zur Klausurvorbereitung.

Sollten Sie den Dies Academicus wahrnehmen wollen, können Sie dies natürlich gerne tun und diesen Stoff nach Skript selbst lesen und/oder in der Übungsgruppe nachfragen oder sonst gerne auf mich zukommen. Die ersten beiden Aufgaben oben behandeln jeweils relevante Beispiele für diesen Stoff.