Jun.-Prof. Simon D. Lentner

Funktionentheorie
Sommersemester 2017

Universität Hamburg

Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1. Man stelle die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar, gebe ihre Beträge und Argumente an und skizziere sie in der komplexen Zahlenebene:

a) i^n, Zeichnung für $n = -1, 0, 1, 2, 3$ und $n = 117$.
b) $(1 + \mathrm{i})^6$
c) $(\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2})^3$
d) $\frac{5-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Man skizziere die folgenden Punktmengen in der komplexen Zahlenebene und beschreibe sie in Worten:

a) $\{z \in \mathbb{C} : |4z - 1| \leq 4\}$
b) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(3 + \mathrm{i}4)z = 0\}$
c) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(3 + \mathrm{i}4)z = 2\}$
d) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(3 + \mathrm{i}4)z = 2\}$
e) $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = |z - z_1|\}$ für $z_0 \neq z_1$

(5 Punkte)

Aufgabe 3.

a) Man gebe alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$ an und beweise die Vollständigkeit der angegebenen Lösungen.
b) Geben Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ an.
Hinweis: Benutzen Sie die Polardarstellung.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 4. Bilden die reellen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

einen Körper? Was ist die multiplikative Untergruppe der Matrizen mit Determinante 1? Geben Sie eine geometrische Interpretation und vergleichen Sie die erhaltene algebraische Struktur mit dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

(4 Punkte)

Aufgabe 5. Konstruieren Sie jeweils entweder eine Folge komplexer Zahlen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den folgenden Eigenschaften oder beweisen Sie, dass eine solche nicht existiert:

a) $\operatorname{Re}(z_n)$ konvergiert, aber z_n hat keine Häufungspunkte.

b) $\operatorname{Re}(z_n)$ und $\operatorname{Im}(z_n)$ haben jeweils zwei Häufungspunkte, aber z_n hat vier Häufungspunkte.

c) $\operatorname{Re}(z_n)$ und $\operatorname{Im}(z_n)$ konvergieren, aber z_n konvergiert nicht.

(3 Punkte)

Abgabe: Wegen Ostermontag ausnahmsweise Mittwoch 19.4.2017 in der Vorlesung.

Hinweis: Abgabe in Gruppen von maximal drei Studierenden pro Blatt. Jede/r muss in der Lage sein, alle Aufgaben vorzurechnen.